

Über nichtauflösbare endliche Gruppen.

Von N. ITÔ in Nagoya (Japan) und J. SZÉP Szeged (Ungarn).

Es bezeichne G eine endliche Gruppe, $r(G)$ die Anzahl derjenigen nicht-isomorphen Untergruppen von G , die keine Normalteiler in G sind, ferner bezeichne $t(G)$ die Anzahl der in der Ordnung von G auftretenden verschiedenen Primfaktoren.

ITÔ [1] hat folgenden Satz bewiesen:

A) Gilt für die nichtauflösbare endliche Gruppe G die Ungleichung $r(G) < 2t(G) + 2$, so ist G mit der Ikosaedergruppe isomorph.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses beweisen wir jetzt den folgenden

Satz. *Es sei G eine nichtauflösbare endliche Gruppe mit der Eigenschaft $r(G) \leq 3t(G) + 2$, die einen p -Normalteiler ($\neq 1$) enthält (p Primzahl). Dann ist G mit einer der folgenden Gruppen isomorph:*

a) *die spezielle lineare homogene Gruppe $SLH(2, 5)$,*

b) *die Gruppe $A_5 \times Z_p$, wo A_5 die Ikosaedergruppe, Z_p eine zyklische Gruppe von der Ordnung p ($\neq 2, 3, 5$) bedeutet.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß G nicht zu den im Satz erwähnten Typen gehört, so werden wir mit der Bedingung $r(G) \leq 3t(G) + 2$ in einen Widerspruch geraten.

Vor allem gilt offenbar $t(G) \geq 3$. Es sei P der erwähnte p -Normalteiler von G .

Zuerst zeigen wir, daß P keine Sylowgruppe von G sein kann. Wäre nämlich P eine Sylowgruppe von G , so würde nach einem bekannten Satz von SCHUR [2] $G = PH$ ($P \cap H = 1$) sein, wobei H eine Untergruppe von G ist. Ist H ($\approx G/P$) mit der Ikosaedergruppe nicht isomorph, so gilt nach A) $r(H) \geq 2(t(G) - 1) + 2 = 2t(G)$ und somit $r(G) \geq r(G/P) + r(H) \geq 4t(G) \geq 3t(G) + 3$, was einen Widerspruch bedeutet. Ist H mit der Ikosaedergruppe isomorph, so ist $t(G) = 4$ und $r(H) = r(G/P) = 7$. In diesem Falle muß P ein minimaler Normalteiler von G sein. Wäre nämlich auch $P' \subset P$ ein Normalteiler von G , dann wäre $r(G) > r(P'H) \geq r(P'H/P') + r(H) = 14$, was einen Widerspruch bedeutet. Ist die Ordnung von P größer als p , so hat G

eine Untergruppe der Ordnung p , woraus $r(G) > r(G/P) + r(H)$ folgt, was wieder einen Widerspruch bedeutet. Folglich ist P von der Ordnung p . Wir zeigen, daß P das Zentrum von G ist. Es sei nämlich Q eine 2-Sylowgruppe von G (also eine Vierergruppe). Betrachten wir die Gruppe PQ . In dieser hat P einen von P verschiedenen Zentralisator, was wegen $G/P \cong A_5$ nur dann möglich ist, falls der Zentralisator von P mit G zusammenfällt. Somit ist $G \cong A_5 \times Z_p$ und dies widerspricht unserer Voraussetzung, daß G nicht zu den erwähnten Typen gehört.

Setzen wir nun voraus, daß P keine Sylowgruppe von G ist. In diesem Falle führen wir den Beweis in zwei Teilen aus.

1) Wir setzen voraus, daß G/P mit der Ikosaedergruppe nicht isomorph ist.

Es sei P ein maximaler p -Normalteiler von G . Zuerst zeigen wir, daß P zugleich auch minimal in G (also der einzige p -Normalteiler von G) ist. Es sei nämlich $P' (\neq P)$ ein p -Normalteiler von G . Nach A) gilt $r(G/P) \cong \cong 2t(G) + 2$ ($t(G/P) = t(G)$); es sollen auch die $t(G) - 1$ nicht zu p gehörigen Sylowgruppen von G zu diesen Untergruppen gerechnet werden. Nun existieren in G mindestens zwei Sylowgruppen S und S' , für welche $P'S$ und $P'S'$ keine Normalteiler in G sind. Diese beiden Untergruppen zu den vorher erwähnten hinzunehmend gelangen wir zu einem Widerspruch.

Wir haben schon gesehen, daß es in G jedenfalls $2t(G) + 2 + t(G) - 1 = 3t(G) + 1$ Untergruppen gibt. Um einen Widerspruch zu erhalten, müssen wir noch die Existenz zweier passender Untergruppen nachweisen. Ist die Ordnung von P größer als p^2 , so hat G eine Untergruppe der Ordnung p und eine der Ordnung p^2 , womit wir in Widerspruch geraten werden. Es habe P die Ordnung p^2 . Auch in diesem Falle gibt es eine gewünschte Gruppe der Ordnung p , so daß wir nur noch die Existenz einer weiteren passenden Untergruppe nachzuweisen haben. Wir machen die (offenbar zulässige) Voraussetzung, daß die nicht zu p gehörigen Sylowgruppen von G Primzahlordnungen haben. Die Ordnung von G enthält mindestens zwei Primzahlen, die größer als p sind, andernfalls wäre nämlich G auflösbar. Es sei Q eine q -Sylowgruppe von G , wo $q (> p)$ die größte in der Ordnung von G enthaltene Primzahl ist. Man sieht leicht ein, daß in diesem Falle $QP = Q \times P$ gilt. Es gibt also in G eine Gruppe der Ordnung pq , die offenbar kein Normalteiler in G ist. Somit gelangen wir wieder zu einem Widerspruch.

Es habe P die Ordnung p . In diesem Falle können wir voraussetzen, daß in der Ordnung von G außer p höchstens ein einziger Primfaktor mit einer die Einheit übertreffenden Exponenten auftritt. Es sei Q eine Sylowgruppe der Ordnung q^2 von G ($q \neq p$).

Zuerst beweisen wir, daß G für jeden Primfaktor r der Ordnung von G nicht r -nilpotent ist. (Für eine Primzahl r heißt eine endliche Gruppe r -nilpotent, wenn die r -Sylowgruppen homomorphe Bilder der Gruppe sind.) Ist nämlich $r=p$, ist also G p -nilpotent, so bezeichne H die Gruppe $P \times_p G$, wo $_p G$ das p -Sylowkomplement von G ist. (p -Sylowkomplement einer endlichen Gruppe G heißt jede Untergruppe von G , für die gilt, daß das Produkt ihrer Ordnung und der einer p -Sylowgruppe gleich der Ordnung von G ist.) Dann ist (wegen $H \cong SLH(2, 5)$) $r(H) \geq 3t(G) + 2$. Dazu nehmen wir noch eine p -Sylowgruppe hinzu und bekommen so einen Widerspruch. Ist $r \neq p$, so gilt $G \supset_r G \supset P$. Ist $_r G \cong SLH(2, 5)$, $A_5 \times Z_p$, so ist $r(_r G) \geq 3(t(G) - 1) + 3 = 3t(G)$. Außerdem haben wir die Gruppen G_r, G_s, G_t ($r \neq s \neq t \neq r$), wo G_r, G_s, G_t die r -, s -, t -Sylowgruppen von G sind. Ist $_r G \cong A_5 \times Z_p$, so ist $t(G) = 5$, $r(_r G) = 14$. Außerdem haben wir die Gruppen $G_r, G_r(A_5 \times Z_p)_2, G_r(A_5 \times Z_p)_3, G_r(A_5 \times Z_p)_5$. Endlich sei $_r G \cong SLH(2, 5)$, so ist $t(G) = 4$, $r(_r G) = 11$. Dann nehmen wir die Gruppen $G_r, G_r(SLH)_2, G_r(SLH)_3, G_r(SLH)_5$ hinzu, so bekommen wir einen Widerspruch.

Wir setzen jetzt unseren Beweis mit Hilfe einer anderen Abzählung der Untergruppen von G fort. Es habe in G die p -Sylowgruppe \bar{P} die Ordnung p^{e+1} . Wir betrachten die Faktorgruppe G/P . Diese enthält $t(G)$ Sylowgruppen und eben so viel minimale, nicht r -nilpotente Untergruppen, die nämlich den verschiedenen Primfaktoren der Ordnung von G entsprechen. Falls wir zu diesen $2t(G)$ Gruppen die $t(G) - 1$ nicht zu p gehörigen Sylowgruppen von G , sowie eine Untergruppe der Ordnung q von G hinzurechnen, dann müssen wir, um zu einem Widerspruch zu gelangen, noch die Existenz von drei passenden Untergruppen nachweisen. Falls $e > 2$ besteht, dann führen die Untergruppen der Ordnungen p, p^2 bzw. q von G/P bereits zum gewünschten Widerspruch. Es sei nunmehr $e = 2$. Auch jetzt gibt es in G/P zwei Untergruppen der Ordnungen p bzw. q . Um zu einem Widerspruch zu gelangen, müssen wir die Existenz noch einer Untergruppe nachweisen. Enthält \bar{P} außer P noch eine Untergruppe der Ordnung p , dann haben wir damit den gewünschten Widerspruch. Andernfalls ist \bar{P} entweder zyklisch, oder aber fällt es mit der Quaternionengruppe zusammen. Setzen wir \bar{P} als zyklisch voraus. Da P Normalteiler in G ist, ist \bar{P} in G im Zentrum seines Normalisators enthalten, so daß (nach einem Satz von BURNSIDE) $G = H\bar{P}$ ($H \cap \bar{P} = 1$) gilt. Ist H q -nilpotent, dann enthält sie eine Gruppe der Ordnung rq^2 (r -Primzahl), was zu einem Widerspruch führt. Andernfalls enthält sie eine minimale nicht q -nilpotente Gruppe, was auch einen Widerspruch bedeutet. Es sei nunmehr \bar{P} die Quaternionengruppe. Wir betrachten den Normalisator der Sylowgruppe Q . Dieser ist von Q verschieden, denn andernfalls ist G q -nilpotent, woraus sich leicht ein Widerspruch ergibt. Ist die Ordnung dieses Normali-

sators nicht durch 2 teilbar, so enthält er eine Gruppe von der Ordnung q^2r (r eine von 2 verschiedene Primzahl), und dies führt zu einem Widerspruch: Ist dagegen die Ordnung des Normalisators durch 2 teilbar, so ist auch die Ordnung des Normalisators der q -Sylowgruppe von G/P durch 2 teilbar, und somit gibt es in G/P eine Gruppe der Ordnung $2q$, was zu einem Widerspruch führt. Es sei nunmehr $e=1$. In diesem Falle ist q offenbar der kleinste in der Ordnung von G enthaltene Primfaktor, und es gilt $q=2$, denn andernfalls wäre G auflösbar. Betrachten wir jetzt das Produkt der 2-Sylowgruppe von G und der Gruppe P . In dieser hat P einen von P verschiedenen Zentralisator, also ist P im Zentrum von G enthalten. Andernfalls wäre nämlich G auflösbar. Ist \bar{P} zyklisch, so fällt sein Normalisator mit seinem Zentralisator zusammen, so daß \bar{P} im Zentrum seines Normalisators enthalten ist, und dies führt, auf analoger Weise wie im vorigen Falle, zu einem Widerspruch. Ist \bar{P} nicht zyklisch, so enthält G eine von P verschiedene Gruppe der Ordnung p , und das führt zu einem Widerspruch.

Wir können also voraussetzen, daß die von \bar{P} verschiedenen Sylowgruppen von G Primzahlordnung haben. Auch jetzt gibt es in G/P $t(G)$ -Sylowgruppen und $t(G)$ minimale nicht r -nilpotente Gruppen zu jedem Primfaktor r der Ordnung von G . Wenn wir noch die $t(G)-1$ nicht zur Primzahl p gehörigen Sylowgruppen von G hinzurechnen, dann müssen wir, um zu einem Widerspruch zu gelangen, noch die Existenz vier passender Untergruppen nachweisen. Vor allem bemerken wir, daß \bar{P}/P und somit auch \bar{P} keine zyklische Gruppen sein können, weil dann G auflösbar wäre [3]. Es sei $e \geq 4$. Ist \bar{P} nicht die verallgemeinerte Quaternionengruppe, so gibt es in \bar{P} vier passende Gruppen (der Ordnungen p, p^2, p^3 und p^4) und so erhalten wir einen Widerspruch. Ist \bar{P} die verallgemeinerte Quaternionengruppe und ist die Ordnung von P größer als 2, so gibt es in \bar{P} wieder vier passende Untergruppen, was zu einem Widerspruch führt. Es habe nun P die Ordnung 2; auch jetzt können wir annehmen, daß \bar{P} die verallgemeinerte Quaternionengruppe ist. In diesem Fall ist der Normalisator der 2-Sylowschen Untergruppe von G/P nicht gleich dieser 2-Sylowschen Untergruppe und dieser Normalisator enthält eine neue Untergruppe. Also kann man auch in diesem Falle vier neue Untergruppen finden, was zu einem Widerspruch führt. Es sei jetzt $e=3$. Auch in diesem Falle gibt es in \bar{P}/P zwei Gruppen von p -Potenzordnung (der Ordnungen p und p^2). Wir müssen also nur noch die Existenz zweier weiteren Gruppen nachweisen. Im Falle $p > 2$ gibt es in \bar{P} eine Gruppe der Ordnung p . Gibt es in \bar{P} ein Element der Ordnung p^2 , so gibt es zweierlei Gruppen mit solcher Ordnung, und das bedeutet einen Widerspruch. Es sei \bar{P} eine elementare p -Gruppe (d. h. jedes Element von \bar{P} habe die Ordnung p). Ist die Gruppe \bar{P} Abelsch, so

betrachten wir die minimale nicht p -nilpotente Untergruppe R von G/P . Es sei Q das p -Sylowsche Komplement dieser Untergruppe in G . Da \bar{P} Abelsch ist, gibt es eine Untergruppe P' derart, daß die p -Sylowgruppe von R in G in der Form $P \times P'$ darstellbar ist. In diesem Falle ist aber $P'Q$ eine neue Untergruppe, was zu einem Widerspruch führt. Es sei jetzt \bar{P} nicht Abelsch. Dann hat \bar{P} die Kommutatorgruppe P . (Ist nämlich \bar{P}, P nicht Abelsch, so ist G/P — nach einem Satz von H. WIELANDT [4] — p -nilpotent.) Nun enthält \bar{P} zweierlei Untergruppen der Ordnung p^3 ; die eine ist Abelsch, die andere aber nicht. Somit erhalten wir wieder einen Widerspruch. Es sei jetzt $p=2$. Ist \bar{P} nicht die verallgemeinerte Quaternionengruppe, so gibt es in \bar{P} außer P noch eine Gruppe der Ordnung 2. Falls jetzt noch \bar{P} ein Element der Ordnung 4 enthält, dann gibt es in \bar{P} zweierlei Untergruppen der Ordnung 4, was bereits den gewünschten Widerspruch ergibt. Wir können also \bar{P} als Abelsche Gruppe vom Typus $(2, 2, \dots)$ voraussetzen. Betrachten wir die minimale nicht 2-nilpotente Untergruppe von G/P . Das führt, ähnlich wie im vorigen Falle, zu einem Widerspruch. Es sei \bar{P} die verallgemeinerte Quaternionengruppe. Wir betrachten in G/P eine minimale nicht 2-nilpotente Untergruppe. Die Ordnung dieser Untergruppe ist durch 12 teilbar, so daß G eine Untergruppe der Ordnung 24 enthält. Weiterhin enthält \bar{P} zweierlei Untergruppen der Ordnung 8. (Die eine ist zyklisch, die andere eine Quaternionengruppe.) Dies führt zu einem Widerspruch. Nunmehr sei $e=2$. In diesem Falle ist $p=2$. Auch jetzt gibt es in G/P $t(G)$ Sylowgruppen, $t(G)$ minimale nicht nilpotente Untergruppen, sowie eine Untergruppe der Ordnung 2. Wir müssen noch die Existenz dreier Untergruppen nachweisen. Wir können die Gruppe G/P als einfach voraussetzen. Ist nämlich N Normalteiler von G/P , dann ist N nicht auflösbar, denn andernfalls würde sich leicht ein Widerspruch ergeben. N enthält also die 2-Sylowgruppe von G . Ist $s|(G:N)$ und $q, r|(N)$ ($q \neq r$; s, q, r ungerade Primzahlen), so existieren in G Untergruppen der Ordnungen qs, rs und 2^s , und somit erhalten wir einen Widerspruch. Da nach unseren Voraussetzungen $G/P \not\cong A_5$ ist, so gibt es in G/P nach einem Satz von L. RÉDEI [5] eine nichtabelsche zweitmaximale Untergruppe. Es sei H eine maximale Untergruppe von G/P , welche die erwähnte zweitmaximale Untergruppe enthält. Setzen wir zuerst H als auflösbar voraus. Die Ordnung von H ist offenbar mindestens durch drei verschiedene Primfaktoren q, r, s teilbar. Sind die Zahlen q, r, s ungerade, so enthält H eine Untergruppe der Ordnung qrs ; diese Gruppe, sowie die darin enthaltenen Untergruppen der Ordnungen qr, qs, rs führen zu einem Widerspruch (eine der Gruppen von den Ordnungen qr, qs, rs ist zyklisch). Enthält die Ordnung von H keine drei verschiedenen ungeraden Primzahlen, so enthält H entweder eine Untergruppe der Ordnung $2rq$, oder aber eine der Ordnung $4rq$.

Da eine der Zahlen r, q größer als 3 ist, gelangen wir auf analoger Weise wie im vorigen Falle zu einem Widerspruch. Setzen wir jetzt H als nichtauflösbar voraus. Wie G/P , so kann auch H als einfache Gruppe vorausgesetzt werden. In diesem Falle sind aber nach einem Satz von M. SUZUKI [6] G/P und H mit der Ikosaedergruppe n -isomorph. (Die maximalen metazyklischen Untergruppen von G/P und H haben nämlich in unserem Falle die Ordnung 4, und gehören zu den von M. SUZUKI beschriebenen Typen.) Somit erhalten wir nochmals einen Widerspruch.

2) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß G/P mit der Ikosaedergruppe isomorph ist.

Ähnlich, wie im vorigen Falle, sieht man auch jetzt leicht ein, daß P der einzige Normalteiler von p -Potenzordnung in G ist. Es gilt $t(G) = 3$ und $r(G/P) = 7$. Außer den $r(G/P)$ Untergruppen hat G noch zwei Sylowgruppen, die zu von p verschiedenen Primzahlen gehören. Wir müssen nur noch die Existenz dreier passender Untergruppen nachweisen. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß die Ordnung von P nicht größer als p^3 ist, denn andernfalls hat P die neuen Untergruppen der Ordnungen p, p^2 und p^3 , und das bedeutet bereits einen Widerspruch. Es habe P die Ordnung p^3 . Es sei $p = 5$. In diesem Falle sind in P die Gruppen der Ordnungen 5 und 25, sowie in G die Gruppe der Ordnung 2 neu. Somit erhalten wir nochmals einen Widerspruch. Es sei $p = 3$. Der Widerspruch wird jetzt durch die neuen Gruppen der Ordnungen 3, 9 und 2 herbeigeführt. Es sei $p = 2$. Wir betrachten in G das Urbild der Normalisatoren der 5-Sylowgruppe von G/P . Dieses hat die Ordnung 80, und man sieht auch leicht, daß es nilpotent ist. Nun ist in dieser Gruppe eine neue Gruppe der Ordnung 10 enthalten, und wenn man noch die Untergruppen der Ordnungen 2 und 4 von P hinzunimmt, so ergibt sich auch hier der gewünschte Widerspruch. Es habe P die Ordnung p^2 . Es sei $p = 5$ oder $p = 3$. Da die Untergruppen der Ordnung 5 oder 3 von P , und die Untergruppen der Ordnungen 2 und 6 oder 10 von G neu sind, so haben wir wieder einen Widerspruch. Es sei jetzt $p = 2$. Wir betrachten in G das Urbild des Normalisators der 5-Sylowgruppe von G/P . Dieses Urbild ist eine nilpotente Gruppe der Ordnung 40. Ihre Untergruppe von der Ordnung 10 ist neu. Betrachten wir jetzt das Urbild des Normalisators der 3-Sylowgruppe von G/P in G . Dieses enthält eine Untergruppe der Ordnung 6 oder der Ordnung 12, deren 2-Sylowgruppe zyklisch ist. So ist auch diese Gruppe neu. Nehmen wir jetzt noch die Untergruppe der Ordnung 2 von P hinzu, so erhalten wir einen Widerspruch.

Es habe endlich P die Ordnung p . Nach einem Satz von ZASSENHAUS [7] ist dann $p = 2$. Die Gruppe hat also die Ordnung 120, und kann somit in unserem Falle nur mit der in unserem Satze erwähnten Gruppe zusammenfallen. (S. auch Satz 12 in der erwähnten Arbeit von ZASSENHAUS.)

Literaturverzeichnis.

- [1] N. Itô, On the number of isomorphic classes of non-normal subgroups in a finite group, *diese Acta* 16 (1955), 9—11.
- [2] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Bd. I (Berlin—Leipzig, 1937), Satz 25, p. 125.
- [3] *ebenda*, Satz 11, p. 139.
- [4] H. WIELANDT, p -Sylowgruppen und p -Faktorgruppen, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 182 (1940), 180—193.
- [5] L. RÉDEI, Ein Satz über die endlichen, einfachen Gruppen, *Acta Math.*, 84 (1950), 129—153.
- [6] M. SUZUKI, A characterization of simple groups $LF(2, p)$, *Journal of the Faculty of Science, Univ. of Tokyo*, Section I, 6 (1951), 259—293.
- [7] H. ZASSENHAUS, Über endliche Fastkörper, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ.*, 11 (1936), S. 187—220, Satz 12, 15.

(Eingegangen am 29. März 1956.)